

OLIMPIADA LOCALĂ DE MATEMATICĂ
13 FEBRUARIE 2010
CLASA A XII-A MATE-INFO

1. Pentru $a \in \mathbb{R}$ se definesc funcțiile $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = x + a$, $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_a(x) = -x + a$.

Fie $G = \{f_a | a \in \mathbb{R}\} \cup \{g_a | a \in \mathbb{R}\}$.

a) Demonstrați că (G, \circ) este grup necomutativ.

b) Determinați mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N}^* | \exists h \in G, \text{ord}(h) = n\}$

2. a) Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și F o primitivă a sa care verifică egalitatea:

$$F(x) = \frac{x}{2}(2f(x) - x - 4) + 2\arctg x, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Sa se determine funcția f .

b) Calculați $\int \frac{1}{x(x^{4020} + 1)} dx$.

3. Să se determine cel mai mic număr natural n cu proprietatea ca $\exists x, y, z \in \mathbb{Z}_n^*$ distincte

două câte două astfel încât $x + y = 2z$ și $xy = z^2$

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ o funcție continuă pe \mathbb{R} . Să se arate că:

$$\int_0^1 f(x) dx \geq 2 \int_0^1 \log_2 f(x) dx.$$

NOTA

Toate subiectele sunt obligatorii; fiecare subiect are 7 puncte; timp de lucru 3 ore.

www.mategl.com